Doble Grado en Ing. Informática y Matemáticas

Examen de Análisis Matemático I – Febrero 2013

1. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = x^n$. Prueba que la sucesión $\{f_n\}$ converge a la función nula $f = 0$ en el espacio $(\mathcal{C}([0,1]), \| \|_1)$ pero no es convergente en $(\mathcal{C}([0,1]), \| \|_\infty)$.

2. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $(1,2,3)$ y que forma con los ejes coordenados un tetraedro de volumen mínimo (el volumen del tetraedro es un tercio del área de la base por la altura).

3. Justifica que las igualdades:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x\,\mathrm{e}^v + yu - u^2 & = & 0 \\ y\cos v + x^2 - u^2 & = & 1 \end{array} \right.$$

   definen a u y a v como funciones implícitas de x e y en un entorno del punto $(2,1)$ siendo $u(2,1) = 2$, $v(2,1) = 0$. Calcula $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(2,1)$.

4. Sea $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$ y supongamos que para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ se verifica que:

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{y})\|$$

   Prueba que $D\mathbf{F}(\mathbf{a})$ es invertible en todo punto $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, que $\mathbf{F}(\mathbb{R}^n)$ es cerrado y que $\mathbf{F}$ es un difeomorfismo de $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}^n$.

5. Regla de la cadena. Derivadas parciales de funciones compuestas.

Granada, 8 de febrero de 2013